Delprov B	Uppgift 1-11. Endast svar krävs.
Delprov C	Uppgift 12-16. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter för Delprov B och Delprov C tillsammans.
Hjälpmedel	Formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Delprov A) och tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 66 poäng varav 24 E-, 23 C- och 19 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 17 poäng
D: 27 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 35 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 45 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 53 poäng varav 11 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar och ritar figurer vid behov.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: ______________________________

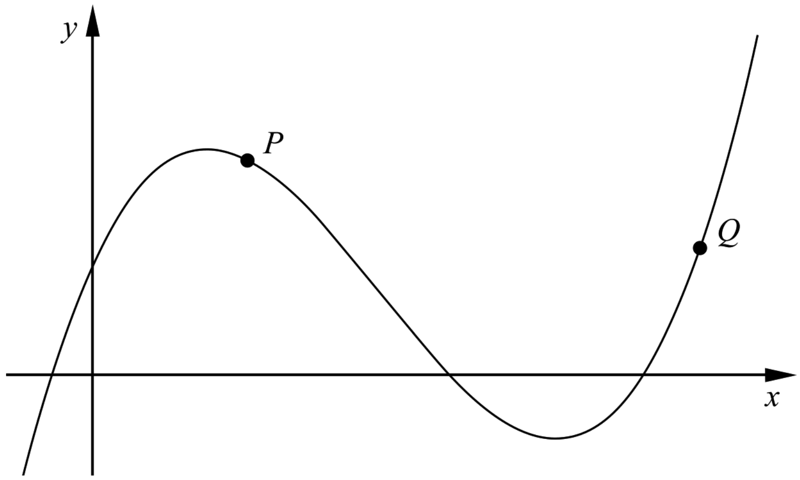
Födelsedatum: ______________________________

Gymnasieprogram/Komvux: ______________________________

Delprov B: Digitala verktyg är inte tillåtna. *Endast svar krävs*. Skriv dina svar direkt i provhäftet.

1. För funktionen f gäller att $f(x) = 3x^4 - 12x$
Bestäm $f'(x)$ ______________________ (1/0/0)

2. I figuren visas grafen till en tredjegradsfunktion.

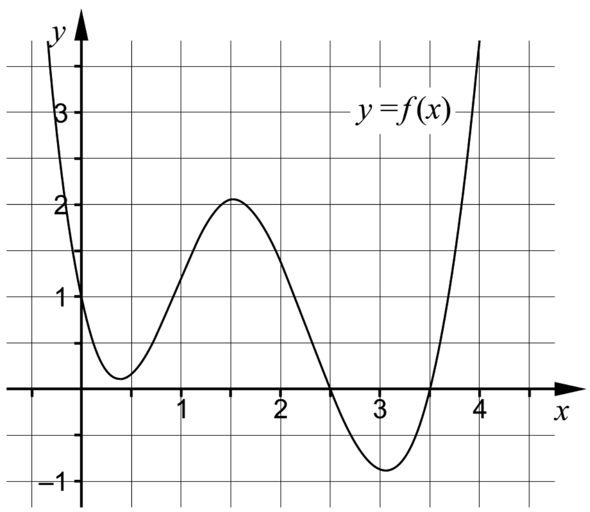


Rita i figuren

a) en tangent till kurvan i punkten P. (1/0/0)

b) en sekant som går genom punkten Q. (1/0/0)

3. I figuren visas huvuddragen av grafen till en funktion f.



Lös ekvationen $f(x) = 0$ ______________________ (1/0/0)

4. Förenkla uttrycken så långt som möjligt.

a) $\dfrac{(x+3)^{10}}{(x+3)^{5}}$ ______________________ (1/0/0)

b) $\dfrac{a}{\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2a}}$ ______________________ (0/1/0)

5. Värdet hos en bil minskar exponentiellt enligt sambandet $V(t) = 100\,000\ \mathrm{e}^{-0,2t}$ där V är värdet i kronor och t är tiden i år efter inköpet.

Vilket av alternativen A-H nedan anger förändringshastigheten för bilens värde 5 år efter inköpet?

A. $-100\,000\ \mathrm{e}^{-1}$ kr

B. $-100\,000\ \mathrm{e}^{-1}$ kr/år

C. $100\,000\ \mathrm{e}^{-1}$ kr

D. $100\,000\ \mathrm{e}^{-1}$ kr/år

E. $-20\,000\ \mathrm{e}^{-1}$ kr

F. $-20\,000\ \mathrm{e}^{-1}$ kr/år

G. $20\,000\ \mathrm{e}^{-1}$ kr

H. $20\,000\ \mathrm{e}^{-1}$ kr/år ______________________ (0/1/0)

6. Lös ekvationen $x^3 - 2x^2 = 3x$ ______________________ (0/1/0)

7. För en funktion f gäller att $y = f(x)$. Grafen till funktionen har en tangent i den punkt där $x = 5$. Tangentens ekvation är $3x + 2y - 10 = 0$

a) Bestäm $f'(5)$ ______________________ (0/1/0)

b) Bestäm $f(5)$ ______________________ (0/1/0)

8. Mobiltelefonabonnemanget RingUpp har en fast månadsavgift på 49 kr och en öppningsavgift på 69 öre per samtal. Inga andra avgifter tillkommer.

Antag att du ringer x samtal under en viss månad.
Den totala kostnaden i kr under denna månad är då $0{,}69x + 49$

a) Skriv ett uttryck för kostnaden per samtal under månaden.

_____________________ (0/1/0)

b) Kostnaden per samtal under en månad närmar sig en undre gräns då antalet samtal ökar. Ange denna gräns. Svara i kronor.

_____________________ (0/0/1)

9. Grafen till funktionen f är en rät linje. Funktionen f har nollstället $x = 3$

Det finns flera värden på konstanterna a och b så att $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ där $a < b$

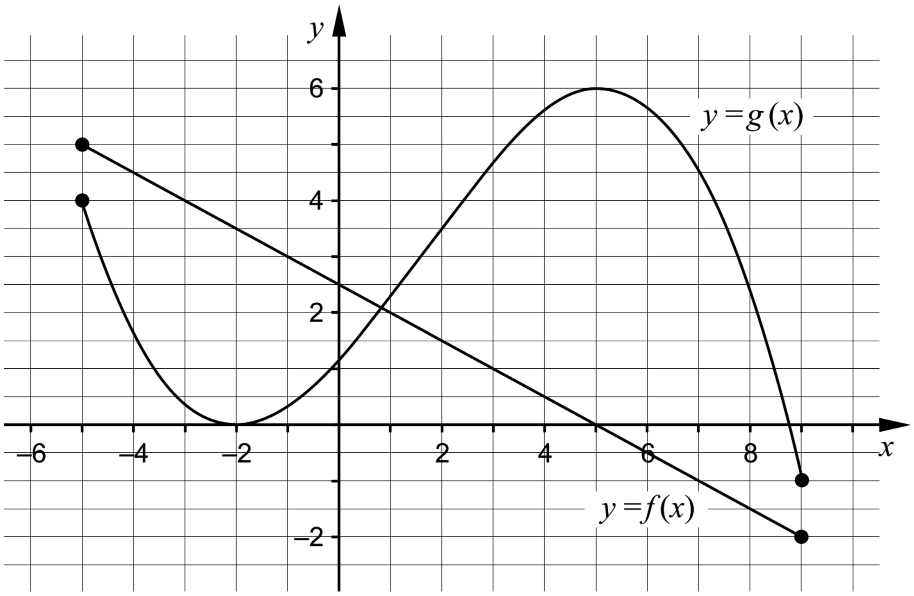
Ge ett exempel på möjliga värden på a och b som uppfyller villkoren ovan.

$a =$ ___________ $b =$ ___________ (0/1/0)

10. Bestäm värdet på konstanten a så att $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{a}{2 + \dfrac{4}{x}} = 5$

_____________________ (0/1/0)

11. Figuren visar graferna till funktionerna f och g som är definierade i intervallet $-5 \leq x \leq 9$
Funktionen h bildas som summan av f och g, det vill säga
$h(x) = f(x) + g(x)$.



Använd graferna för att lösa följande uppgifter.

a) Bestäm $h(2)$ ____________________ (0/1/0)

b) Bestäm största värdet för funktionen h i intervallet $-5 \leq x \leq 9$ ____________________ (0/0/1)

c) Bestäm $h'(5)$ ____________________ (0/0/1)

Delprov C: Digitala verktyg är inte tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

12. Vid en undersökning har man registrerat när samtal tas emot i en telefonväxel. Det visar sig att förändringshastigheten av antalet samtal följer den förenklade modellen
$A'(t) = 200 - 2t$
där A' är antalet samtal/minut och t är tiden i minuter efter att telefonväxeln öppnat.

a) Beräkna $\int_0^{10} (200 - 2t)\,dt$ algebraiskt. (2/0/0)

b) Beskriv med ord vad integralens värde betyder i detta sammanhang. (1/1/0)

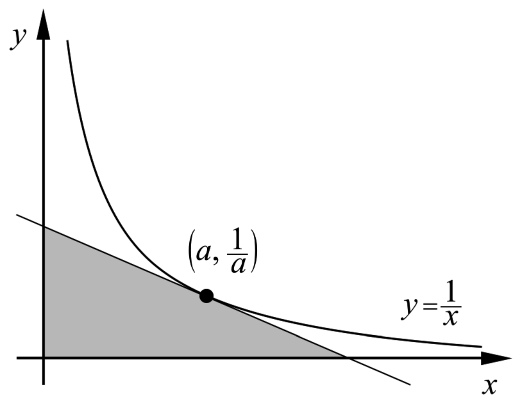
13. För funktionen f gäller att $f(x) = x^3 - 12x$
Bestäm med hjälp av derivata koordinaterna för eventuella maximi-, minimi- och terrasspunkter för funktionens graf.

Bestäm också karaktär för respektive punkt, det vill säga om det är en maximi-, en minimi- eller en terrasspunkt. (3/1/0)

14. Lös ekvationen $\dfrac{1}{x(1-x)} = 1 + \dfrac{1}{1-x}$ (0/3/0)

15. Bestäm en andragradsfunktion f som uppfyller villkoret att $f'(3) = 2$ (0/2/0)

16. Bevisa att den triangel som innesluts av de positiva koordinataxlarna och en tangent till kurvan $y = \frac{1}{x}$ har arean 2 areaenheter *oavsett* var tangenten tangerar kurvan. Utgå från att tangeringspunkten har koordinaterna $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ (0/1/3)



Delprov D	Uppgift 17-26. Fullständiga lösningar krävs.
Provtid	120 minuter.
Hjälpmedel	Digitala verktyg, formelblad och linjal.

Kravgränser Provet består av ett muntligt delprov (Delprov A) och tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 66 poäng varav 24 E-, 23 C- och 19 A-poäng.

Kravgräns för provbetyget
E: 17 poäng
D: 27 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 35 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 45 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 53 poäng varav 11 poäng på A-nivå

Efter varje uppgift anges hur många poäng du kan få för en fullständig lösning eller ett svar. Där framgår även vilka kunskapsnivåer (E, C och A) du har möjlighet att visa. Till exempel betyder (3/2/1) att en korrekt lösning ger 3 E-, 2 C- och 1 A-poäng.

Till uppgifter där det står ”*Endast svar krävs*” behöver du endast ge ett kort svar. Till övriga uppgifter krävs att du redovisar dina beräkningar, förklarar och motiverar dina tankegångar, ritar figurer vid behov och att du visar hur du använder ditt digitala verktyg.

Skriv ditt namn, födelsedatum och gymnasieprogram på alla papper du lämnar in.

Namn: ______________________________

Födelsedatum: ______________________________

Gymnasieprogram/Komvux: ______________________________

Delprov D: Digitala verktyg är tillåtna. Skriv dina lösningar på separat papper.

17. Timo sätter regelbundet in pengar på ett konto med en årsränta på 3 %. I början av varje år sätter han in 5 000 kr.

Hur mycket pengar har Timo på sitt konto direkt efter den tionde insättningen? (2/0/0)

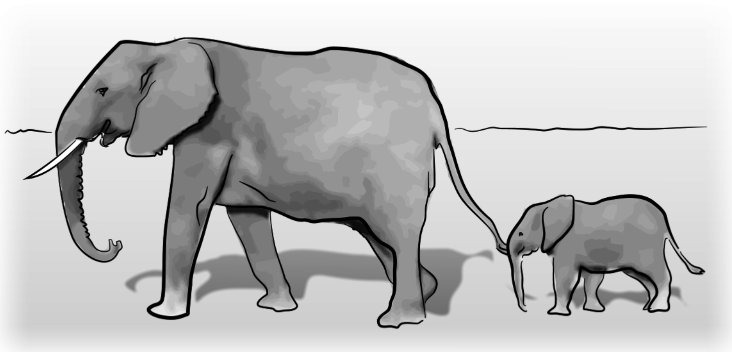
18. Kalle säger:

- *Det finns bara en primitiv funktion till* $f(x) = \mathrm{e}^x$

Har Kalle rätt? Motivera. (1/0/0)

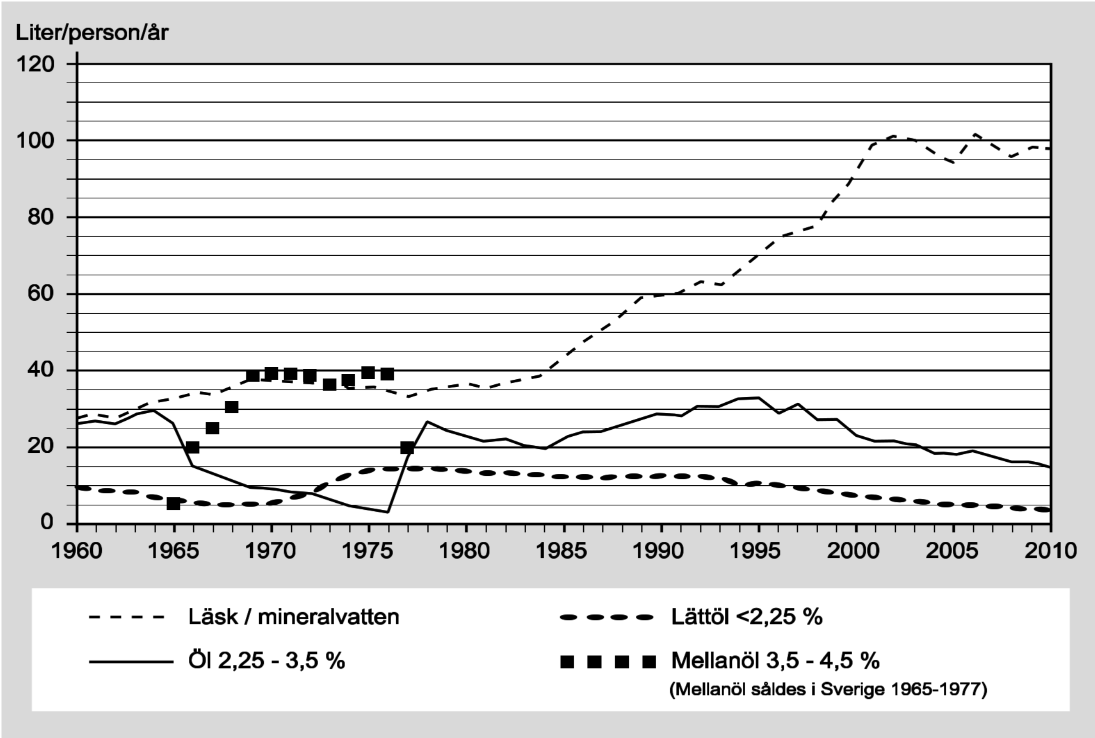
19. För funktionerna f och g gäller att $f(x) = 15x^2$ och $g(x) = x^3 - 33x$
Bestäm de värden på x där funktionernas grafer har samma lutning. (2/0/0)

20. Ett elefantfosters vikt ges av sambandet $V(t) = 0{,}310 \cdot \mathrm{e}^{0{,}271 \cdot t}$ där $t \geq 1$
V är elefantfostrets vikt i kg och t är tiden i månader efter befruktningen.
När elefantungen föds väger den 120 kg.



Hur lång tid efter befruktningen föds elefantungen? (2/0/0)

21. I diagrammet nedan visas hur konsumtionen av läsk/mineralvatten samt öl har förändrats i Sverige sedan år 1960.

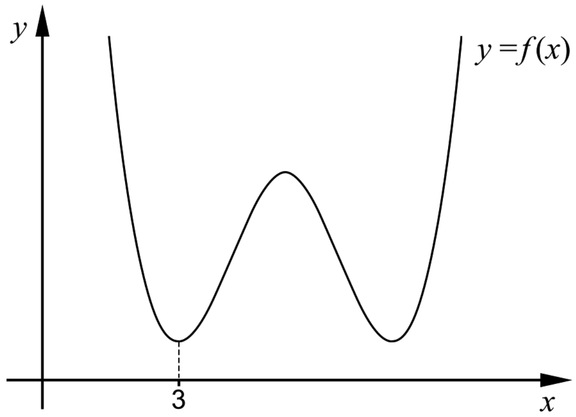


a) Bestäm den genomsnittliga förändringshastigheten i (liter/person/år)/år för konsumtionen av läsk/mineralvatten under tidsperioden 1960-2010. (2/0/0)

Den genomsnittliga förändringshastigheten för konsumtionen av mellanöl under tidsperioden 1966-1977 är 0 (liter/person/år)/år.

b) Förklara varför den genomsnittliga förändringshastigheten inte är ett lämpligt mått för att beskriva hur konsumtionen av mellanöl förändrats under tidsperioden 1966-1977. (0/0/1)

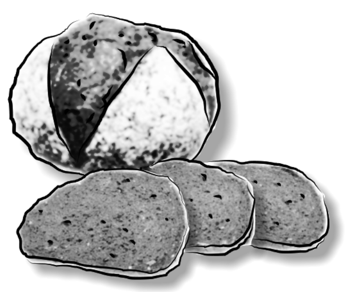
22. Figuren visar grafen till fjärdegradsfunktionen f. En av minimipunkterna har x-koordinaten 3



Förklara med hjälp av grafens utseende varför summan $f(3)+f'(3)+f''(3)$ är större än noll. (1/1/0)

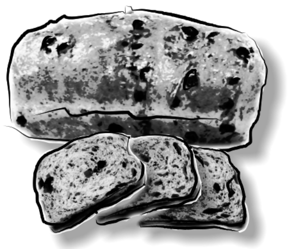
23. I ett bageri bakas två olika sorters surdegslimpor: Hurtig och Nyttig. I recepten ingår rågmjöl och surdeg, se nedan.

Hurtig



8 hg rågmjöl
2,5 hg surdeg

Nyttig



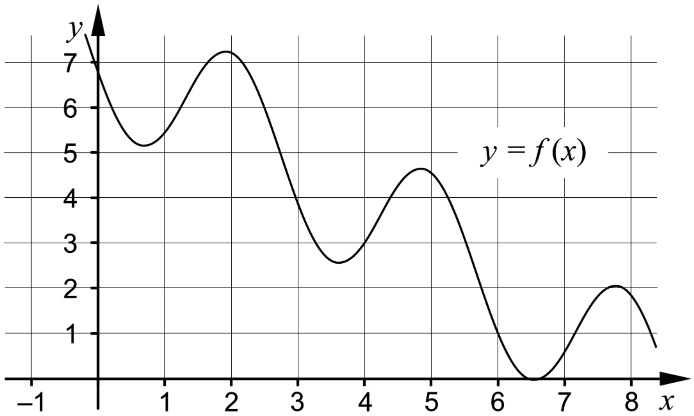
10 hg rågmjöl
2 hg surdeg

Inför dagens bakning har bagaren 460 hg rågmjöl och 110 hg surdeg.

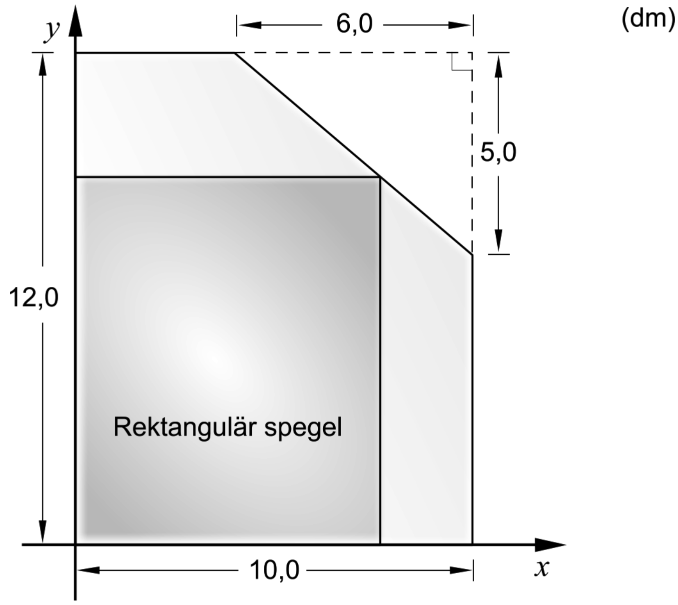
Bagaren gör en vinst på 14 kr för varje Hurtig och 12 kr för varje Nyttig. Han vill göra en så stor total vinst som möjligt och funderar på om han ska baka både Hurtig och Nyttig eller om det räcker med att endast baka en av sorterna. Han räknar med att sälja allt han bakar.

Hur många limpor Hurtig respektive Nyttig ska bagaren baka för att få maximal vinst? (0/4/0)

24. Figuren visar grafen till funktionen f . Beräkna $\int_4^6 f'(x)\mathrm{d}x$ (0/0/2)



25. En glasmästare har av misstag skurit av ett hörn på ett rektangulärt spegelglas som hade måtten 12,0 dm × 10,0 dm. Den avskurna biten har formen av en rätvinklig triangel där de vinkelräta sidorna är 6,0 dm respektive 5,0 dm. Se figur.



Glasmästaren vill använda det kvarvarande spegelglaset till en rektangulär spegel som har sitt ena hörn på den avskurna kanten. Glasmästaren vill också att spegeln ska få så stor area som möjligt.

Beräkna det mått på bredden som ger spegelns största area. (0/0/4)

26. En geometrisk summa består av fem termer där den andra termen är $\dfrac{27}{n}$ och den femte termen är $\dfrac{1}{n}$.

Skriv ett uttryck för summan på enklaste form. (0/0/3)

Till eleven - Information inför det muntliga delprovet

Du kommer att få en uppgift som du ska lösa skriftligt och sedan ska du presentera din lösning muntligt. Om du behöver får du ta hjälp av dina klasskamrater, din lärare och ditt läromedel när du löser uppgiften. Din muntliga redovisning börjar med att du presenterar vad uppgiften handlar om och sedan får du beskriva och förklara din lösning. Du ska redovisa alla steg i din lösning. Däremot, om du har gjort samma beräkning flera gånger (till exempel i en värdetabell) så kan det räcka med att du redovisar några av beräkningarna. Din redovisning är tänkt att ta maximalt 5 minuter och ska göras för en mindre grupp klasskamrater och din lärare.

Den uppgift som du får ska i huvudsak lösas för hand, algebraiskt. Det kan hända att du behöver en miniräknare för att göra en del beräkningar men du ska inte hänvisa till grafritande och/eller symbolhanterande funktioner på räknaren (om du har en sådan typ av räknare) när du redovisar din lösning.

Vid bedömningen av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är
Din redovisning ska innehålla de delar som behövs för att dina tankar ska gå att följa och förstå. Det du säger bör komma i lämplig ordning och inte innehålla någonting onödigt. Den som lyssnar ska förstå hur beräkningar, beskrivningar, förklaringar och slutsatser hänger ihop med varandra.

Hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning
Din redovisning bör innehålla både beskrivningar och förklaringar. Man kan enkelt säga att en beskrivning svarar på frågan *hur* och en förklaring svarar på frågan *varför*. Du beskriver något när du till exempel berättar *hur* du har gjort en beräkning. Du förklarar något när du motiverar *varför* du till exempel kunde använda en viss formel.

Hur väl du använder den matematiska terminologin
När du redovisar bör du använda ett språk som innehåller matematiska termer, uttryckssätt och symboler som är lämpliga utifrån den uppgift du har löst.

Matematiska termer är ord som till exempel ”exponent”, ”funktion” och ”graf”.

Ett exempel på ett matematiskt uttryckssätt är att x^2 utläses ”x upphöjt till 2” eller ”x i kvadrat”.
Några exempel på matematiska symboler är π och $f(x)$, vilka utläses ”pi” och ”f av x”.

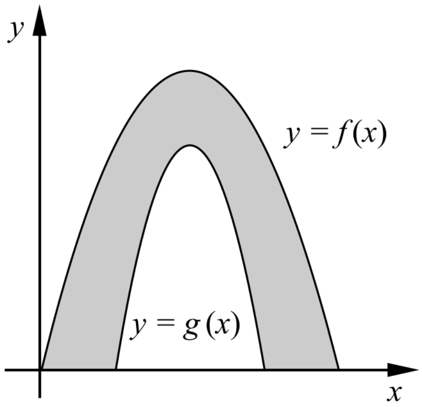
Uppgift 1.

Namn:____________________________

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Formen av en valvbåge kan beskrivas av det område som begränsas av graferna till funktionerna *f* och *g* samt *x*-axeln (se figur). För funktionerna gäller att $f(x) = -x^2 + 4x$ och $g(x) = -3x^2 + 12x - 9$



Beräkna valvbågens area om 1 längdenhet motsvarar 1 meter.

Uppgift 2.

Namn:________________________________

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:

- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

I den här uppgiften ska du undersöka funktionen $v = 5y - 3x$
För de två variablerna x och y gäller villkoren:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 2y - x \leq 6 \\ 2y - 3x \geq -12 \end{cases}$$

Bestäm det största och det minsta värde som funktionen $v = 5y - 3x$ kan anta.

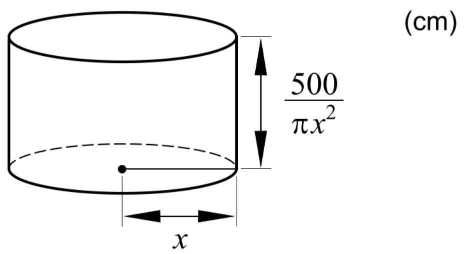
Uppgift 3.

Namn:______________________________

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:

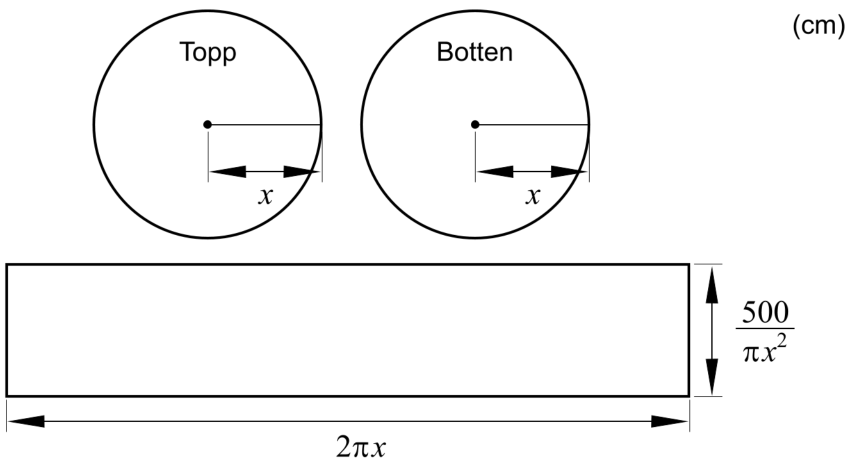
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

Cylindriska konservburkar som har volymen 500 cm^3 kan se ut på många olika sätt. Om radien är x cm så blir höjden $\frac{500}{\pi x^2}$ cm (se Figur 1).



Figur 1

En sådan konservburk tillverkas av tre plåtbitar (se Figur 2).



Figur 2

Bestäm konservburkens radie så att den sammanlagda arean av plåtbitarna blir så liten som möjligt.

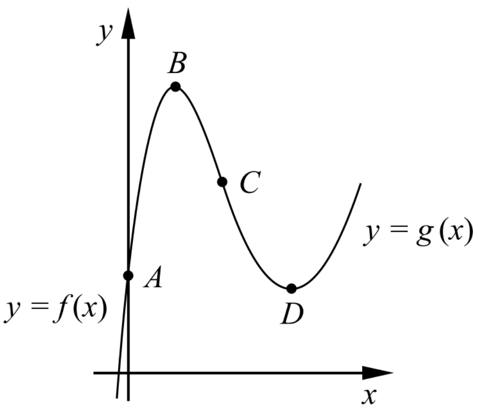
Uppgift 4.

Namn:________________________________

Vid bedömning av din muntliga redovisning kommer läraren att ta hänsyn till:
- hur fullständig, relevant och strukturerad din redovisning är,
- hur väl du beskriver och förklarar tankegångarna bakom din lösning,
- hur väl du använder den matematiska terminologin.

I figuren visas en kurva som är sammansatt av två kurvor. Den första kurvan, som går genom A och B och sedan till C, ges av $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$

Den andra kurvan, som går från C och sedan genom D, ges av $g(x) = x^2 - 7x + 14$



I den gemensamma punkten C har båda kurvorna lutningen -3. B är en maximipunkt och D är en minimipunkt.

Bestäm koordinaterna för punkterna A, B, C och D.

Bedömningsmatris för bedömning av muntlig kommunikativ förmåga

Kommunikativ förmåga	**E**	**C**	**A**	**Max**
Fullständighet, relevans och struktur Hur fullständig, relevant och strukturerad elevens redovisning är.	Redovisningen kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Det finns en övergripande struktur men redovisningen kan bitvis vara fragmentarisk eller rörig. (1/0/0)		Redovisningen är fullständig och endast relevanta delar ingår. Redovisningen är välstrukturerad. (1/0/1)	(1/0/1)
Beskrivningar och förklaringar Förekomst av och utförlighet i beskrivningar och förklaringar.	Någon förklaring förekommer men tyngdpunkten i redovisningen ligger på beskrivningar. Utförligheten i de beskrivningar och de förklaringar som framförs kan vara begränsad. (1/0/0)		Redovisningen innehåller tillräckligt med utförliga beskrivningar och förklaringar. (1/0/1)	(1/0/1)
Matematisk terminologi Hur väl eleven använder matematiska termer, symboler och konventioner.	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse vid enstaka tillfällen i redovisningen. (1/0/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom delar av redovisningen. (1/1/0)	Eleven använder matematisk terminologi med rätt betydelse och vid lämpliga tillfällen genom hela redovisningen. (1/1/1)	(1/1/1)
Summa				(3/1/3)

Innehåll

Allmänna riktlinjer för bedömning

Bedömning ska ske utgående från läroplanens mål, ämnesplanens förmågor samt kunskapskraven och med hänsyn tagen till den tolkning av dessa dokument som gjorts lokalt. Utgångspunkten är att eleverna ska få poäng för lösningarnas förtjänster och inte poängavdrag för fel och brister.

För att tydliggöra anknytningen till kunskapskraven används olika kvalitativa förmågepoäng. I elevernas provhäften anges den poäng som varje uppgift kan ge, till exempel innebär (1/2/3) att uppgiften ger maximalt 1 E-poäng, 2 C-poäng och 3 A-poäng. I bedömningsanvisningarna anges dessutom för varje poäng vilken förmåga som prövas. De olika förmågorna är inte oberoende av varandra och det är den förmåga som bedöms som den *huvudsakliga* som markeras. Förmågorna betecknas med B (Begrepp), P (Procedur), PL (Problemlösning), M (Modellering), R (Resonemang) och K (Kommunikation). Det betyder till exempel att E_{PL} och A_R ska tolkas som en ”problemlösningspoäng på E-nivå” respektive en ”resonemangspoäng på A-nivå”.

För uppgifter av kortsvarstyp, där endast svar krävs, är det elevens slutliga svar som ska bedömas.

För uppgifter av långsvarstyp, där eleverna ska lämna fullständiga lösningar, krävs för full poäng en redovisning som leder fram till ett godtagbart svar eller slutsats. Redovisningen ska vara tillräckligt utförlig och uppställd på ett sådant sätt att tankegången kan följas. Ett svar med t.ex. enbart resultatet av en beräkning utan motivering ger inga poäng.

Frågan om hur vissa typfel ska påverka bedömningen lämnas till lokala beslut. Det kan till exempel gälla lapsus, avrundningsfel, följdfel och enklare räknefel. Om uppgiftens komplexitet inte minskas avsevärt genom tidigare fel så kan det lokalt beslutas att tilldela poäng på en uppgiftslösning trots förekomst av t.ex. lapsus och följdfel.

Bedömningsanvisningar

Bedömningsanvisningarna till långsvarsuppgifterna är skrivna enligt två olika modeller. Avvikelser från dessa kommenteras i direkt anslutning till uppgiften i förekommande fall.

Modell 1:

Godtagbar ansats, t.ex. …	$+1\ E_P$
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (…)	$+1\ E_P$

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (2/0/0). Den andra poängen är beroende av den första poängen, d.v.s. den andra poängen utfaller först om den första poängen utfallit. Detta indikeras med användning av liten bokstav och oftast av att ordet ”med” inleder den rad som beskriver vad som krävs för att den andra poängen ska erhållas.

Modell 2:

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, t.ex. … $1\ E_R$	Godtagbart välgrundat resonemang, t.ex. … $1\ E_R$ och $1\ C_R$	Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, t.ex. … $1\ E_R$, $1\ C_R$ och $1\ A_R$

Kommentar: Uppgiften ger maximalt (1/1/1). Denna typ av bedömningsanvisning används när en och samma uppgift kan besvaras på flera kvalitativt olika nivåer. Beroende på hur eleven svarar utdelas (0/0/0) eller (1/0/0) eller (1/1/0) eller (1/1/1).

Bedömning av skriftlig kommunikativ förmåga
Förmågan att kommunicera skriftligt kommer inte att särskilt bedömas på E-nivå för enskilda uppgifter. Elever som uppfyller kraven för provbetyget E för de övriga förmågorna anses kunna redovisa och kommunicera på ett sådant sätt att kunskapskraven för skriftlig kommunikation på E-nivå automatiskt är uppfyllda.

För uppgifter där elevens skriftliga kommunikativa förmåga ska bedömas gäller de allmänna kraven nedan.

Kommunikationspoäng på C-nivå (C_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara någorlunda fullständig och relevant, d.v.s. den kan sakna något steg eller innehålla något ovidkommande. Lösningen ska ha en godtagbar struktur.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med viss anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara möjlig att följa och förstå.

Kommunikationspoäng på A-nivå (A_K) ges under förutsättning att eleven behandlat uppgiften i sin helhet och att lösningen i huvudsak är korrekt.
Dessutom ska

1. lösningen vara i huvudsak fullständig, välstrukturerad samt endast innehålla relevanta delar.
2. matematiska symboler och representationer vara använda med god anpassning till syfte och situation.
3. lösningen vara lätt att följa och förstå.

För uppgifter där det kan delas ut kommunikationspoäng på C- eller A-nivå kan bland annat symboler, termer och hänvisningar förekomma i lösningen. Följande tabell kan då vara till stöd vid bedömningen av skriftlig kommunikativ förmåga:

Symboler	t.ex. $=, \neq, <, >, \leq, \geq, \approx, \pm, \sqrt{\ }, f(x), f'(x), f''(x), x, y, (\ ), [\ ], \int dx$, bråkstreck, index, lim, VL, HL
Termer	t.ex. polynom, rationellt uttryck, kontinuerlig/diskret funktion, rät linje, andragrads-/polynom-/potens-/exponentialfunktion, funktionsvärde, definitions-/värdemängd, punkt, intervall, område, koordinat, koordinatsystem, graf, kurva, skärningspunkt, nollställe, symmetrilinje, lutning, riktningskoefficient, ändpunkt, sekant, tangent, ändringskvot, förändringshastighet, gränsvärde, derivata, andraderivata, teckenschema, växande/avtagande, extrempunkt, maximi-/minimi-/terrasspunkt, största/minsta värde, primitiv funktion, integral, talet e, naturlig logaritm, geometrisk summa, olikhet
Hänvisningar	t.ex. till derivatans definition, räta linjens ekvation, tangentens ekvation, formeln för geometrisk summa
Övrigt	t.ex. figurer (med införda beteckningar), definierade variabler, tabeller, angivna enheter

Provsammanställning – Kunskapskrav

Tabell 1 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 3b i förhållande till nivå och förmågor. Poängen i denna tabell anges i samma ordning som i bedömningsanvisningen. Till exempel motsvarar 12a_1 och 12a_2 den första respektive andra poängen i uppgift 12a.

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
A	M_1				1								
	M_2												1
	M_3				1								
	M_4												1
	M_5				1								
	M_6								1				
	M_7												1
B	1		1										
	2a	1											
	2b	1											
	3	1											
	4a		1										
	4b						1						
	5					1							
	6					1							
	7a					1							
	7b					1							
	8a							1					
	8b											1	
	9					1							
	10							1					
	11a					1							
	11b									1			
	11c									1			
C	12a_1		1										
	12a_2		1										
	12b_1	1											
	12b_2					1							
	13_1		1										
	13_2		1										
	13_3		1										
	13_4								1				
	14_1						1						
	14_2						1						
	14_3								1				
	15_1							1					
	15_2							1					
	16_1						1						
	16_2												1
	16_3												1
	16_4												1
D	17_1			1									
	17_2			1									
	18				1								
	19_1			1									
	19_2			1									
	20_1			1									
	20_2			1									
	21a_1	1											
	21a_2	1											
	21b												1
	22_1				1								
	22_2								1				
	23_1							1					
	23_2							1					
	23_3							1					
	23_4								1				
	24_1									1			
	24_2									1			
	25_1											1	
	25_2											1	
	25_3											1	
	25_4												1
	26_1											1	
	26_2											1	
	26_3											1	
	Total	**6**	**7**	**6**	**5**	**7**	**4**	**7**	**5**	**4**	**0**	**7**	**8**
Σ	**66**	**24**				**23**				**19**			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Provsammanställning – Centralt innehåll

Tabell 2 Kategorisering av uppgifterna i kursprovet i Matematik 3b i förhållande till nivå och centralt innehåll. En lista över det centrala innehållet återfinns i slutet av detta häfte.

Del-prov	Uppg.	Nivå			Centralt innehåll Kurs Ma3b															
					Algebra		Samband och förändring											Problem-lösning		
		E	C	A	A1	A2	F6	F7	F8	F9	F10	F11	F12	F13	F14	F15	F16	P1	P3	P4
A		3	1	3																
B	1	1	0	0						X	X									
	2a	1	0	0						X										
	2b	1	0	0						X										
	3	1	0	0		X														
	4a	1	0	0	X															
	4b	0	1	0	X															
	5	0	1	0						X	X	X	X							
	6	0	1	0		X														
	7a	0	1	0						X			X							
	7b	0	1	0						X					X					
	8a	0	1	0	X															
	8b	0	0	1	X			X												
	9	0	1	0												X	X			
	10	0	1	0	X			X										X		
	11a	0	1	0					X											
	11b	0	0	1					X					X						
	11c	0	0	1					X				X							
C	12a	2	0	0												X	X			
	12b	1	1	0												X				
	13	3	1	0						X	X			X	X					
	14	0	3	0	X															
	15	0	2	0						X	X		X					X		
	16	0	1	3						X	X		X		X					
D	17	2	0	0			X											X		
	18	1	0	0												X				
	19	2	0	0						X	X		X		X			X		
	20	2	0	0								X						X	X	
	21a	2	0	0						X										
	21b	0	0	1						X										
	22	1	1	0					X	X			X	X	X					
	23	0	4	0			X											X	X	
	24	0	0	2												X				
	25	0	0	4	X					X	X		X	X	X			X	X	
	26	0	0	3			X											X		
Total		24	23	19																

Kravgränser

Provet består av ett muntligt delprov (Delprov A) och tre skriftliga delprov (Delprov B, C och D). Tillsammans kan de ge 66 poäng varav 24 E-, 23 C- och 19 A-poäng. Observera att kravgränserna förutsätter att eleven deltagit i alla fyra delprov, det vill säga Delprov A, B, C och D.

Kravgräns för provbetyget
E: 17 poäng
D: 27 poäng varav 8 poäng på minst C-nivå
C: 35 poäng varav 14 poäng på minst C-nivå
B: 45 poäng varav 6 poäng på A-nivå
A: 53 poäng varav 11 poäng på A-nivå

Bedömningsformulär

Elev:____________________________ Klass:________________ Provbetyg: _____________

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
A	M_1												
	M_2												
	M_3												
	M_4												
	M_5												
	M_6												
	M_7												
B	1												
	2a												
	2b												
	3												
	4a												
	4b												
	5												
	6												
	7a												
	7b												
	8a												
	8b												
	9												
	10												
	11a												
	11b												
	11c												
C	12a_1												
	12a_2												
	12b_1												
	12b_2												
	13_1												
	13_2												
	13_3												
	13_4												
	14_1												
	14_2												
	14_3												
	15_1												
	15_2												
	16_1												
	16_2												
	16_3												
	16_4												

Delprov	Uppg. Poäng	Förmåga och nivå											
		E				C				A			
		B	P	PM	RK	B	P	PM	RK	B	P	PM	RK
D	17_1												
	17_2												
	18												
	19_1												
	19_2												
	20_1												
	20_2												
	21a_1												
	21a_2												
	21b												
	22_1												
	22_2												
	23_1												
	23_2												
	23_3												
	23_4												
	24_1												
	24_2												
	25_1												
	25_2												
	25_3												
	25_4												
	26_1												
	26_2												
	26_3												
	Total												
Σ													

	Total	**6**	**7**	**6**	**5**	**7**	**4**	**7**	**5**	**4**	**0**	**7**	**8**
Σ	**66**	**24**				**23**				**19**			

B = Begrepp, P = Procedur, PM = Problemlösning/Modellering och RK = Resonemang/Kommunikation

Bedömningsanvisningar

Exempel på ett godtagbart svar anges inom parentes. Till en del uppgifter är bedömda elevlösningar bifogade för att ange nivån på bedömningen. Om bedömda elevlösningar finns i materialet markeras detta med en symbol.

Delprov B

1. **Max 1/0/0**

Korrekt svar ($f'(x) = 12x^3 - 12$) +1 E_P

2. **Max 2/0/0**

a) Godtagbart ritad tangent +1 E_B

b) Godtagbart ritad sekant, som skär kurvan i minst två punkter varav en är Q +1 E_B

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

3. **Max 1/0/0**

Godtagbart svar ($x_1 = 2{,}5$ och $x_2 = 3{,}5$) +1 E_B

4. **Max 1/1/0**

a) Korrekt svar ($(x+3)^5$) +1 E_P

b) Korrekt svar (a^2) +1 C_P

5. **Max 0/1/0**

Korrekt svar (Alternativ F: $-20\,000\ \mathrm{e}^{-1}$ kr/år) +1 C_B

6. **Max 0/1/0**

Korrekt svar ($x_1 = 0$, $x_2 = -1$ och $x_3 = 3$) +1 C_B

7. **Max 0/2/0**

a) Korrekt svar $(-1{,}5)$ +1 C_B

b) Korrekt svar $(-2{,}5)$ +1 C_B

8. **Max 0/1/1**

a) Korrekt svar $\left(\dfrac{49+0{,}69x}{x}\right)$ +1 C_M

b) Korrekt svar (0,69) +1 A_M

9. **Max 0/1/0**

Korrekt svar (t.ex. $a=2$ och $b=4$) +1 C_B

10. **Max 0/1/0**

Korrekt svar (10) +1 C_{PL}

11. **Max 0/1/2**

a) Godtagbart svar (5) +1 C_B

b) Godtagbart svar (9) +1 A_B

Kommentar: Svaret $h(-5)$ ges noll poäng.

c) Godtagbart svar $(-0{,}5)$ +1 A_B

Delprov C

12. **Max 3/1/0**

a) Godtagbar ansats, bestämmer korrekt primitiv funktion +1 E_P

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (1900) +1 E_P

b) Godtagbar ansats till beskrivning, anger att det rör sig om antalet samtal +1 E_B

med godtagbar beskrivning av att det är totala antalet samtal under de första 10 minuterna +1 C_B

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

13. **Max 3/1/0**

Korrekt bestämning av derivatans nollställen, $x_1 = 2$ och $x_2 = -2$	+1 E_P
med korrekt bestämning av extrempunkternas koordinater $(-2, 16)$ och $(2, -16)$	+1 E_P
Godtagbar verifiering av extrempunkternas karaktär (maximipunkt $(-2, 16)$ och minimipunkt $(2, -16)$	+1 E_P
Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4.	+1 C_K

Kommentar: Bedömningen till denna uppgift avviker från de beskrivna bedömningsmodellerna på sidan 3. Den tredje procedurpoängen kan delas ut oavsett om den andra procedurpoängen har delats ut eller inte.

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

14. **Max 0/3/0**

Godtagbar ansats, t.ex. multiplicerar båda leden med $x(1-x)$	+1 C_P
med godtagbar bestämning av lösningen till den omskrivna ekvationen, $x = 1$	+1 C_P
med uteslutning av falsk rot med korrekt svar (Ekvationen saknar lösning)	+1 C_R

15. **Max 0/2/0**

Godtagbar ansats, t.ex. ansätter $f(x) = x^2 + bx$ och deriverar korrekt	+1 C_{PL}
med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (t.ex. $f(x) = x^2 - 4x$)	+1 C_{PL}

16. **Max 0/1/3**

Godtagbar ansats, korrekt bestämning av $f'(a)$, $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$	+1 C_P
med godtagbar fortsättning som inkluderar konstruktiv användning av tangeringspunktens koordinater, t.ex. korrekt bestämning av tangentens ekvation $y = -\dfrac{1}{a^2}x + \dfrac{2}{a}$	+1 A_R
med ett i övrigt godtagbart genomfört bevis	+1 A_R
Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4.	+1 A_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

Delprov D

17. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t.ex. visar insikt om att formeln för geometrisk summa kan användas +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (57319 kr) +1 E_M

18. **Max 1/0/0**

Godtagbart enkelt resonemang, som motiverar varför det inte finns bara en primitiv funktion och att Kalle därför har fel +1 E_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

19. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t.ex. deriverar och tecknar ekvationen $30x = 3x^2 - 33$ +1 E_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar ($x_1 = -1$ och $x_2 = 11$) +1 E_{PL}

20. **Max 2/0/0**

Godtagbar ansats, t.ex. tecknar ekvationen $0,310 \cdot e^{0,271 \cdot t} = 120$ +1 E_M

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (22 månader) +1 E_M

21. **Max 2/0/1**

a) Godtagbar ansats, tecknar en godtagbar ändringskvot +1 E_B

med i övrigt godtagbar lösning med godtagbart svar (1,4) +1 E_B

b) Godtagbart välgrundat och nyanserat resonemang, där det tydligt framgår att måttet är olämpligt eftersom:
en genomsnittlig förändringshastighet som är noll kan tolkas som att konsumtionen inte förändrats under tidsperioden *men* diagrammet visar att konsumtionen varierat +1 A_R

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

22. **Max 1/1/0**

E	C	A
Godtagbart enkelt resonemang, där minst två av termernas bidrag till summan är korrekta och motiverade med hjälp av grafens utseende. 1 E_R	Godtagbart välgrundat resonemang, där alla termernas bidrag till summan är korrekta ($f(3) > 0$, $f'(3) = 0$, $f''(3) > 0$) och motiverade med hjälp av grafens utseende ($f(3)$ är positiv eftersom grafen är ovanför x-axeln, $f'(3)$ är noll eftersom det är en minimipunkt, $f''(3)$ är positiv eftersom det är en minimipunkt). 1 E_R och 1 C_R	

Kommentar: För vissa fjärdegradsfunktioner kan gälla att $f''(a) = 0$ i en minimipunkt. För den funktion vars graf är illustrerad i uppgiften gäller dock att $f''(3) > 0$. Om elever ändå bygger sitt resonemang på att $f''(3) \geq 0$ så bedöms det som acceptabelt.

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

23. **Max 0/4/0**

Godtagbar ansats, definierar variabler och bestämmer ett system av olikheter som motsvarar kraven, t.ex.

$$\begin{cases} 8x + 10y \leq 460 \\ 2{,}5x + 2y \leq 110 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

+1 C_M

med godtagbar fortsättning, visar insikt om att vinstuttrycket ges av $14x + 12y$ +1 C_M

med i övrigt godtagbar lösning, där punkterna (0, 46); (20, 30) och (44, 0) prövas, med korrekt svar (20 Hurtig och 30 Nyttig) +1 C_M

Lösningen kommuniceras på C-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. +1 C_K

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

24. **Max 0/0/2**

Godtagbar ansats, visar insikt om att $f(x)$ är primitiv funktion till $f'(x)$ +1 A_B

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar (-2) +1 A_B

25. **Max 0/0/4**

Godtagbar ansats, härleder ett korrekt samband mellan spegelbitens bredd och höjd, t.ex. $y = \frac{46}{3} - \frac{5}{6}x$ +1 A_M

med godtagbar fortsättning, tecknar ett korrekt uttryck för arean, t.ex. $A = \frac{46}{3}x - \frac{5}{6}x^2$ +1 A_M

med i övrigt godtagbar lösning inklusive verifiering av maximum med godtagbart svar (9,2 dm) +1 A_M

Lösningen kommuniceras på A-nivå, se de allmänna kraven på sidan 4. +1 A_K

Kommentar: Sambanden ovan kan se olika ut beroende på hur variabler definieras och vilken lösningsmetod som används.

Se avsnittet Bedömda elevlösningar.

26. **Max 0/0/3**

Godtagbar ansats, inser att $k^3 = \frac{1}{27}$ där k är kvoten +1 A_{PL}

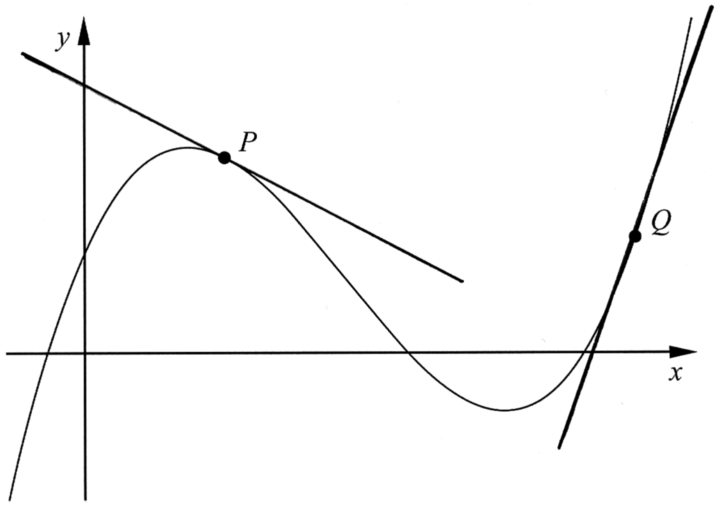
med godtagbar fortsättning, t.ex. bestämmer minst fyra termer korrekt +1 A_{PL}

med i övrigt godtagbar lösning med korrekt svar $\left(\frac{121}{n}\right)$ +1 A_{PL}

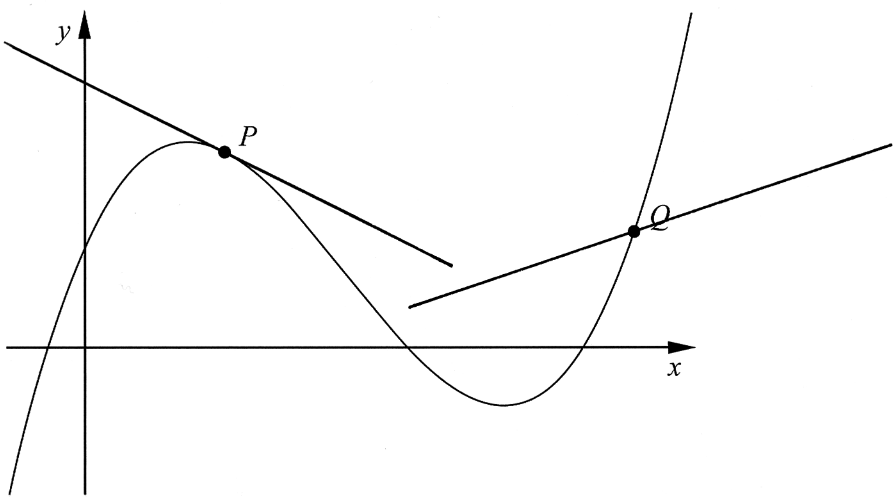
Bedömda elevlösningar

Uppgift 2b

Elevlösning 1 (0 poäng)



Elevlösning 2 (0 poäng)



Kommentar: I elevlösning 1 går det inte att med säkerhet se om det är en sekant som är ritad eller om det är en tangent. Är det en sekant så går den inte genom punkten Q vilket är ett av villkoren. I elevlösning 2 går sekanten inte genom minst två punkter på kurvan. Det är då oklart om det verkligen är en sekant som är ritad. Elevlösningarna ovan ges därför båda noll poäng för deluppgift b.

Uppgift 12b

Elevlösning 1 (1 E_B)

På tio minuter kom det in 1900 samtal

Kommentar: Elevlösningen saknar korrekt beskrivning av tidsintervallet men det framgår att det rör sig om antalet samtal. Sammantaget ges elevlösningen begreppspoängen på E- nivå.

Elevlösning 2 (1 E_B och 1 C_B)

Hur många samtal som kom in mellan
$t = 0$ min och $t = 10$ min.

Kommentar: I elevlösningen framgår att det rör sig om antalet samtal och tidsintervallet är korrekt beskrivet. Sammantaget motsvarar lösningen både begreppspoängen på E- och på C-nivå.

Uppgift 13

Elevlösning 1 (2 E_P)

$f(x) = x^3 - 12x$

$f'(x) = 3x^2 - 12$

$3x^2 - 12 = 0$

$3x^2 = 12$

$x^2 = 12/3$

$x = \pm\sqrt{12/3}$

$x = \pm 2$

$f''(x) = 6x$

$f''(2) = 6 \cdot 2 = 12 > 0$ Minimi

$f''(-2) = 6 \cdot (-2) = -12 < 0$ Maximi

SVAR $\begin{cases} \text{Minimum då } x = 2 \\ \text{Maximum då } x = -2 \end{cases}$

Kommentar: Elevlösningen visar en korrekt beräkning av derivatans nollställen och verifiering, dock saknas beräkning av y-koordinaterna. Därmed ges elevlösningen den första och den tredje procedurpoängen på E-nivå.

Elevlösning 2 (3 E_P)

$f(x) = x^3 - 12x$

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$

$3x^2 - 12 = 0$

$x^2 = 4$

$x = \pm 2$

$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = 8 - 24 = -16$

$f(-2) = -2^3 - 12 \cdot -2 = -8 + 24 = 16$

$f''(x) = 6x$

$f''(2) = 6 \cdot 2 = 12$ Min $(2, -16)$

$f''(-2) = 6 \cdot -2 = -12$ Max $(-2, 16)$

Kommentar: Elevlösningen visar en korrekt bestämning av extrempunkternas koordinater och karaktär, vilket ger tre procedurpoäng på E-nivå. När det gäller kommunikationen är lösningen strukturerad och innehåller de väsentliga delarna. Däremot är skrivsättet "$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$" inte lämpligt, parenteser runt negativa tal saknas, det framgår inte att positiv andraderivata ger minimum och att negativ andraderivata ger maximum. Därmed anses lösningen inte uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå.

Elevlösning 3 (3 E_P och 1 C_K)

$f(x) = x^3 - 12x$

$f'(x) = 3x^2 - 12$

$3x^2 - 12 = 0$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x = \pm 2$

x	-3	-2	0	2	3
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	Max	$\searrow$	Min	$\nearrow$

$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 = -16$

$f(-2) = (-2)^3 - 12 \cdot (-2) = 16$

Svar: Maximipunkt $(-2, 16)$

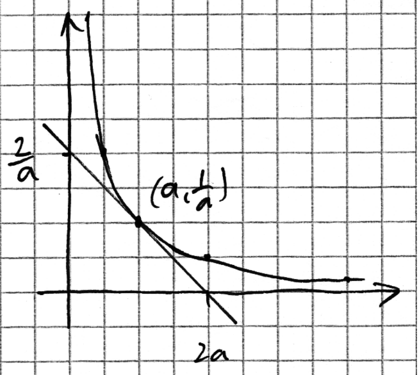
Minimipunkt $(2, -16)$

Kommentar: Elevlösningen är korrekt när det gäller bestämning av extrempunkternas koordinater och karaktär, vilket ger tre procedurpoäng på E-nivå. När det gäller kommunikationen är lösningen strukturerad, symboler och representationer används korrekt och lösningen innehåller i huvudsak de väsentliga delarna. Eventuellt saknas beräkningar som stödjer teckenschemats utseende. Lösningen anses uppfylla kraven för kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 16

Elevlösning 1 (0 poäng)

Eftersom kurvans funktion är $y = \frac{1}{x}$ kommer tangenten till kurvan vid punkten $(a, \frac{1}{a})$ alltid att skära y-axeln vid $2 \cdot 1/a$ och x-axeln vid $2a$



$y = 1/x$

$A = \frac{2a \cdot \frac{2}{a}}{2} = \frac{4}{2} = 2$ A.E.

Kommentar: Elevlösningen innehåller korrekt angiven skärning med *x*- och *y*-axeln, men redovisning för dessa saknas. Elevlösningen ges noll poäng.

Elevlösning 2 (0 poäng)

$y = \frac{1}{x} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2}$ Tangentens ekvation $y = kx + m$

Tang. punkt $(1, 1)$
$k = y'(1) = -1$
$1 = -1 \cdot 1 + m$
$m = 2$, $y = -1 \cdot x + 2$
$x = 0$ ger höjd : 2
$y = 0$ ger bas : 2
$A = \frac{2 \cdot 2}{2} = 2$

Tang. punkt $(0.5, 2)$
$k = y'(0.5) = -4$
$2 = -4 \cdot 0.5 + m$
$m = 4$, $y = -4x + 4$
$x = 0$ ger höjd : 4
$y = 0$ ger bas : 1
$A = \frac{4 \cdot 1}{2} = 2$

Tang. punkt $(2, 0.5)$
$k = y'(2) = -0.25$
$0.5 = -0.25 \cdot 2 + m$
$m = 1$, $y = -0.25x + 1$
$x = 0$ ger höjd : 1
$y = 0$ ger bas : 4
$A = \frac{1 \cdot 4}{2} = 2$

Arean blir alltså 2

Kommentar: Eftersom slutsatsen baseras på specialfall och inte en generell behandling, ges elevlösningen noll poäng.

Elevlösning 3 (1 C_P och 2 A_R)

$f(x) = \frac{1}{x}$

$= -\frac{1}{x^2}$

$f'(a) = -\frac{1}{a^2}$

$y = kx + m$

$\frac{1}{a} = -\frac{1}{a^2} \cdot a + m$

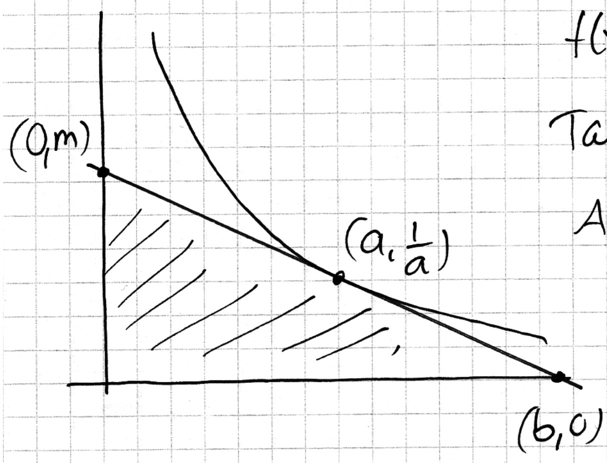
$m = \frac{2}{a}$

x-axeln : $0 = -\frac{1}{a^2}x + \frac{2}{a}$ $\quad x = \frac{2}{a} \cdot a^2 = 2a$

$\frac{2a \cdot \frac{2}{a}}{2} = 2$ $\quad$ Arean är alltid 2 areaenheter

Kommentar: Elevlösningen är korrekt och ger därför en procedurpoäng på C-nivå och två resonemangspoäng på A-nivå. Lösningen är inte välstrukturerad. Symbolhanteringen är bristfällig på andra raden där symbolen $f'(x)$ saknas. Det framgår inte heller med tydlighet hur basen och höjden i triangeln bestäms. Därmed bedöms inte lösningen uppfylla kraven för kommunikationspoäng på A-nivå.

Elevlösning 4 (1 C_P, 2 A_R och 1 A_K)



$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Tangentens lutning $f'(a) = \frac{-1}{a^2} = k$

$A = \frac{b \cdot m}{2}$

$k = \frac{m - 1/a}{0 - a} = -\frac{1}{a^2}$

$m - 1/a = 1/a \Rightarrow m = 2/a$

$k = \frac{\frac{1}{a} - 0}{a - b} = -\frac{1}{a^2}$

$-a^2 \cdot \frac{1}{a} = a - b$

$b - a = a \Rightarrow b = 2a$

$A = \frac{b \cdot m}{2} = \frac{2a \cdot 2/a}{2} = 2$

Dvs. arean är alltid 2.

Kommentar: Elevlösningen är korrekt och lätt att följa och förstå. Sammantaget ges lösningen alla de poäng som uppgiften kan ge, inklusive kommunikationspoängen på A-nivå.

Elevlösning 5 (1 C_P, 2 A_R och 1 A_K)

Tangeringspunkten $= (a, \frac{1}{a})$

lutningen $y' = -x^{-2}$ och $y'(a) = -a^{-2}$

Tangentens funktion $y - y_1 = k(x - x_1)$

$y - \frac{1}{a} = -a^{-2}(x - a)$

$y - \frac{1}{a} = -a^{-2}x + a^{-1}$

$y = -a^{-2}x + \frac{1}{a} + \frac{1}{a}$

$\underline{\underline{y = -a^{-2}x + \frac{2}{a}}}$

Triangelns höjd $y = -a^{-2} \cdot 0 + \frac{2}{a} = \underline{\underline{\frac{2}{a}}}$

Trinangelns bas $0 = -a^{-2} \cdot x + \frac{2}{a}$

$a^{-2}x = \frac{2}{a}$

$a^{-1}x = 2$

$\frac{1}{a} \cdot x = 2$

$\underline{\underline{x = 2a}}$

Triangelns area $\dfrac{2a \cdot \frac{2}{a}}{2} = \dfrac{\frac{2a \cdot 2}{a}}{2} = \dfrac{\frac{4a}{a}}{2} = \frac{4}{2} = \underline{\underline{2}}$

Triangelns area är alltid 2.

Kommentar: Elevlösningen är korrekt och lätt att följa och förstå. Trots att termen ”tangentens funktion” används uppfyller lösningen kraven för samtliga poäng som uppgiften kan ge.

Uppgift 18

Elevlösning 1 (0 poäng)

Nej det finns flera

Kommentar: Eftersom det inte motiveras varför det finns flera primitiva funktioner ges elevlösningen 0 poäng.

Elevlösning 2 (1 E_R)

Kalle har fel för det finns många prim. funktioner och det syns eftersom man lägger dit ett C.

Kommentar: I elevlösningen motiveras varför det finns flera primitiva funktioner genom en något otydlig hänvisning till C. Resonemanget hade varit tydligare om det även skrivits fram att C är en konstant som kan anta olika värden. Lösningen ges nätt och jämnt en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösning 3 (1 E_R)

DET FINNS OÄNDLIGT MÅNGA FUNKTIONER SOM HAR DERIVATAN e^x. ALLTSÅ ÄR KALLE FEL UTE

Kommentar: I elevlösningen motiveras varför det finns flera primitiva funktioner genom en implicit hänvisning till $F'(x) = f(x)$. I motiveringen framgår det inte att ”funktioner” avser primitiva funktioner. Lösningen ges därmed nätt och jämnt en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösning 4 (1 E_R)

Nej, $F(x) = e^x + 2$ o $F(x) = e^x + 4$ är båda såna funktioner

Kommentar: I elevlösningen anges två olika primitiva funktioner som motivering till varför det inte bara finns en. Lösningen anses uppfylla kraven för resonemangspoäng på E-nivå.

Uppgift 21b

Elevlösning 1 (0 poäng)

Om man använder den genomsnittliga förändringen 0 l/år ser det ut som om ingen drack öl. Det som egentligen hänt är ju att ölen under dessa år först ökat och sedan minskat lika mycket

Kommentar: I elevlösningen förs inte resonemanget kring ölkonsumtionens *förändringshastighet*. Elevlösningen ges därmed 0 poäng.

Elevlösning 2 (0 poäng)

Den genomsnittliga förändringshastigheten är noll fast egentligen har konsumtionen först ökat och sedan minskat lika mycket

Kommentar: I elevlösningen framgår inte att en genomsnittlig förändringshastighet med värdet noll kan betyda att konsumtionen är oförändrad. Elevlösningen ges därmed 0 poäng.

Elevlösning 3 (1 A_R)

Den genomsnittl. för. hastigheten är noll vilket gör att man kan tro att konsumtionen varit oförändrad under 1966-1977 vilket inte grafen visar.

Kommentar: I elevlösningen framgår att förändringshastighet med värdet noll kan leda till missuppfattningen att konsumtionen är oförändrad. Däremot förklaras inte tydligt hur konsumtionen förändrats i tidsintervallet. Elevlösningen ges därmed nätt och jämnt en resonemangspoäng på A-nivå.

Elevlösning 4 (1 A_R)

Eftersom förändringen mellan år 1966 och 1977 är noll så kommer även hastigheten att bli det. Men vi kan tydligt se att fram till 1969 ökade det, för att sedan vara ungefär konstant till 1976 och därefter minska. Ett lämpligare sätt vore att dela upp den i tre, som ovan.

Kommentar: Här beskrivs att den genomsnittliga förändringshastigheten är noll men att egentligen har konsumtionen förändrats på tre olika sätt. Det framgår alltså inte med tydlighet att en genomsnittlig förändringshastighet med värdet noll kan tolkas som att ingen förändring skett. Däremot beskrivs hur man på ett bättre sätt kunnat beskriva förändringen i konsumtion, vilket får anses kompensera för otydligheten när det gäller tolkningen av en genomsnittlig förändringshastighet med värdet noll. Elevlösningen ges nätt och jämnt en resonemangspoäng på A-nivå.

Elevlösning 5 (1 A_R)

DEN GENOMSNITTLIGA FÖRÄNDRINGSHASTIGHETEN ÄR NOLL VILKET GÖR ATT MAN KAN TRO ATT KONSUMTIONS-ÄNDRINGEN VARIT NOLL UNDER PERIODEN, FAST EGENTLIGEN HAR KONSUMTIONEN FÖRST ÖKAT OCH SEDAN MINSKAT

Kommentar: Elevlösningen visar på ett tydligt och klart resonemang. Här framgår att en förändringshastighet med värdet noll kan leda till missuppfattningen att konsumtionen är oförändrad fast den egentligen först ökat och sedan minskat. Elevlösningen ges en resonemangspoäng på A-nivå.

Uppgift 22

Elevlösning 1 (1 E_R)

$f(3) > 0$

$f'(3) = 0$ eftersom det är en extrempunkt

$f''(3) > 0$ eftersom det är en minimipunkt

Kommentar: I elevlösningen förklaras inte varför $f(3) > 0$, däremot är förklaringarna kring $f'(3)$ och $f''(3)$ korrekta. Därmed ges elevlösningen en resonemangspoäng på E-nivå.

Elevlösning 2 (1 E_R och 1 C_R)

f(3) är positiv eftersom den är ovanför x-axeln. $f'(3) = 0$ eftersom f(3) är en extrempunkt.
$f''(3)$ är positiv eftersom f(3) är en minimipunkt. Då måste ju $f(3) + f'(3) + f''(3) > 0$ eftersom två av talen är positiva och det 3:e är 0.

Kommentar: I elevlösningen ges ett välgrundat resonemang om varför summan är större än noll eftersom alla tre termernas bidrag till summan motiveras på ett korrekt sätt, även om $f(3)$ felaktigt kallas för extrempunkt/minimipunkt.

Uppgift 23

Elevlösning 1 (3 C_M och 1 C_K)

x = Hurtig   8 hg råg, 2,5 hg surdeg

y = Nyttig   10 hg råg, 2 hg surdeg

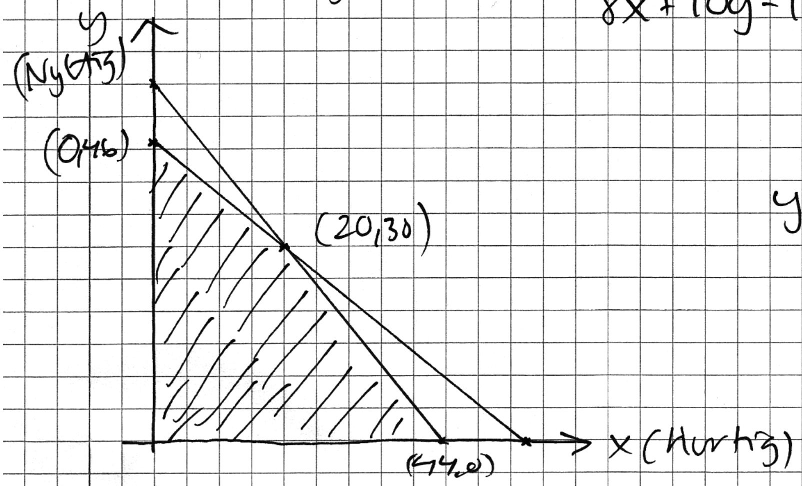
$$\begin{cases} 8x + 10y \le 460 \\ 2{,}5x + 2y \le 110 \\ x, y \le 0 \end{cases}$$

$$8x + 10y - 12{,}5x - 10y = 460 - 550$$

$$-4{,}5x = -90$$

$$x = 20$$

$$y = \frac{460 - 160}{10} = 30$$



Vinstberäkning

(0,46) $V = 14 \cdot 0 + 46 \cdot 12 = 552$ kr

(20,30) $V = 14 \cdot 20 + 30 \cdot 12 = 640$ kr

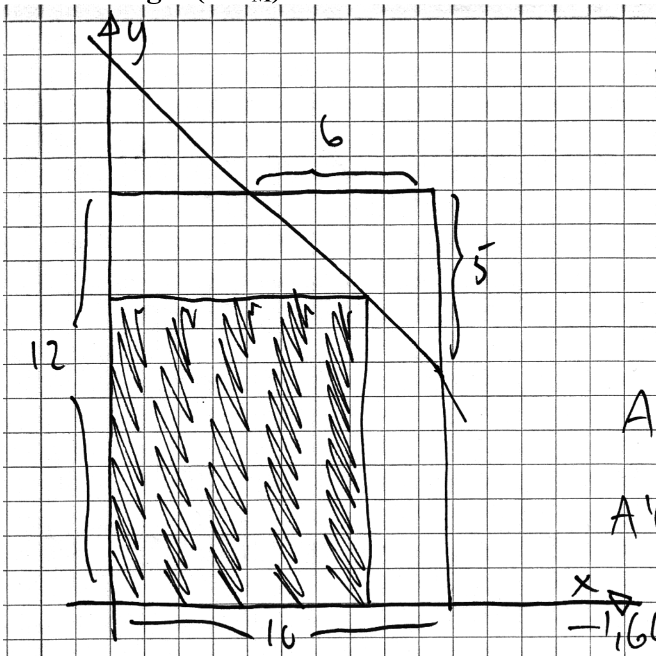
(44,0) $V = 14 \cdot 44 + 0 \cdot 12 = 616$ kr

SVAR: 640 kr är största vinsten (20 hurtig & 30 nyttig)

Kommentar: Elevlösningen visar en korrekt bestämning av hur många Hurtig och Nyttig som ska säljas för att maximal vinst ska erhållas, vilket motsvarar tre modelleringspoäng på C-nivå. När det gäller kommunikationen framgår inte tydligt att x och y är *antalet* limpor av vardera slaget, ett olikhetstecken är felvänt, bestämning av skärningspunkterna med axlarna redovisas inte, vinstfunktionen redovisas inte explicit och svaret är inte helt i linje med frågeställningen. Figuren är tydlig och visar vilket område som är aktuellt, redovisningen bedöms vara strukturerad och möjlig att följa och förstå. Sammantaget bedöms lösningen nätt och jämnt uppfylla kraven för en kommunikationspoäng på C-nivå.

Uppgift 25

Elevlösning 1 (2 A_M)



$k = -\frac{5}{6} = -0,8333$

$m = 12 + \frac{5}{6} \cdot 4 = 15,333$

$y = -0,833x + 15,333$

$\text{Arean} = -0,833x^2 + 15,333x$

$A'(x) = -1,666x + 15,333$

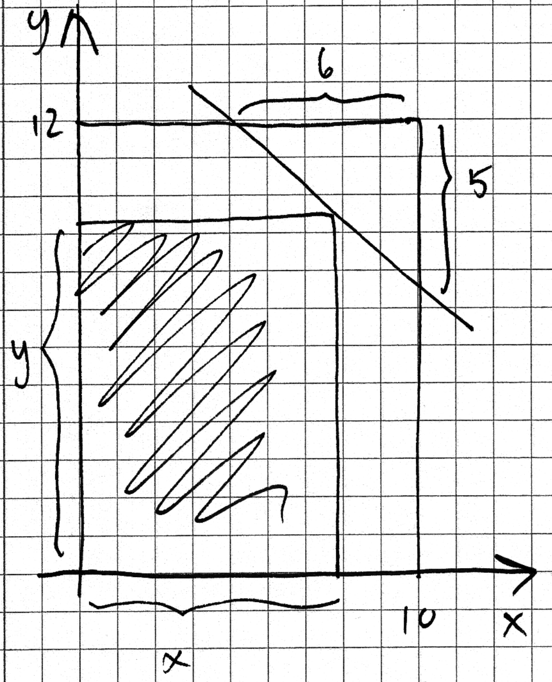
$-1,666x + 15,333 = 0$

$x = \frac{-15,333}{-1,666} = 9,2$

SVAR: 9,2dm

Kommentar: I elevlösningen härleds ett korrekt uttryck för spegelns area även om det är oklart vad variablerna *x* och *y* står för. Att derivatans nollställe motsvarar ett maximum verifieras inte. Sammantaget motsvarar denna lösning två modelleringspoäng på A-nivå.

Elevlösning 2 (3 A_M och 1 A_K)



$$y = -\frac{5}{6}x + m$$

$$12 = -\frac{5}{6} \cdot 4 + m$$

$$m = 15,33$$

$$A = -\frac{5}{6}x^2 + 15,33x$$

$$A'(x) = -\frac{10}{6}x + 15,33$$

$$-\frac{5}{3}x + 15,33 = 0$$

$$x = \frac{15,33}{5/3}$$

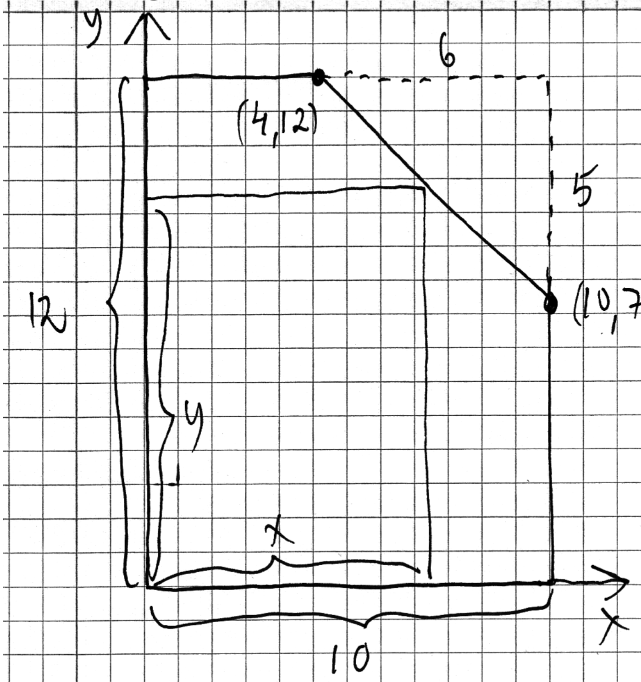
$$x = 9,2$$

Max pga neg koefficent på x^2

$\boxed{\text{SVAR: } 9,2 \text{ dm}}$

Kommentar: I elevlösningen härleds ett korrekt uttryck för arean och största värdet bestäms och verifieras. Gällande kommunikation är lösningen välstrukturerad, symboler används med god anpassning till syfte och situation och variabler är tydligt definierade. Lösningen skulle ha varit tydligare om hänvisning till räta linjens ekvation funnits, om det i härledningen infogats att $A = x \cdot y$ samt om den använda punkten $(4,12)$ markerats i figuren. Sammantaget ges elevlösningen tre modelleringspoäng på A-nivå och nätt och jämnt en kommunikationspoäng på A-nivå.

Elevlösning 3 (3 A_M och 1 A_K)



Bredden är x
Höjden är y
Arean är $x \cdot y$

$y = kx + m$

$k = -\frac{5}{6}$

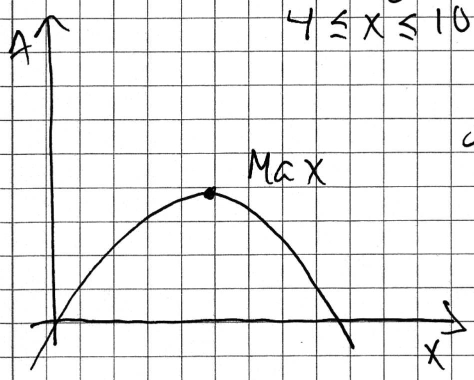
$7 = -\frac{5}{6} \cdot 10 + m$

$m = \frac{21}{3} + \frac{25}{3} = \frac{46}{3}$

$y = -\frac{5}{6}x + \frac{46}{3}$

$A(x) = -\frac{5}{6}x^2 + \frac{46}{3}x$

$4 \leq x \leq 10$



Söker max med grafräknaren
(calculate maximum)

$x = 9,2$ dm ger max area

SVAR: 9,2 dm

Kommentar: Elevlösningen är korrekt och innehåller alla väsentliga delar. Maximum bestäms och verifieras med hjälp av en lämplig grafräknarfunktion och den kurvskiss som visar på maximipunkten. Gällande kommunikation är lösningen lätt att följa och förstå eftersom variablerna är tydligt definierade, lösningen är välstrukturerad och symboler används med god anpassning till syfte och situation. Sammantaget ges lösningen alla poäng som är möjliga att få.

Ur ämnesplanen för matematik

Matematiken har en flertusenårig historia med bidrag från många kulturer. Den utvecklas såväl ur praktiska behov som ur människans nyfikenhet och lust att utforska matematiken som sådan. Kommunikation med hjälp av matematikens språk är likartad över hela världen. I takt med att informationstekniken utvecklas används matematiken i alltmer komplexa situationer. Matematik är även ett verktyg inom vetenskap och för olika yrken. Ytterst handlar matematiken om att upptäcka mönster och formulera generella samband.

Ämnets syfte

Undervisningen i ämnet matematik ska syfta till att eleverna utvecklar förmåga att arbeta matematiskt. Det innefattar att utveckla förståelse av matematikens begrepp och metoder samt att utveckla olika strategier för att kunna lösa matematiska problem och använda matematik i samhälls- och yrkesrelaterade situationer. I undervisningen ska eleverna ges möjlighet att utmana, fördjupa och bredda sin kreativitet och sitt matematikkunnande. Vidare ska den bidra till att eleverna utvecklar förmåga att sätta in matematiken i olika sammanhang och se dess betydelse för individ och samhälle.

Undervisningen ska innehålla varierade arbetsformer och arbetssätt, där undersökande aktiviteter utgör en del. När så är lämpligt ska undervisningen ske i relevant praxisnära miljö. Undervisningen ska ge eleverna möjlighet att kommunicera med olika uttrycksformer. Vidare ska den ge eleverna utmaningar samt erfarenhet av matematikens logik, generaliserbarhet, kreativa kvaliteter och mångfacetterade karaktär. Undervisningen ska stärka elevernas tilltro till sin förmåga att använda matematik i olika sammanhang samt ge utrymme åt problemlösning som både mål och medel. I undervisningen ska eleverna dessutom ges möjlighet att utveckla sin förmåga att använda digital teknik, digitala medier och även andra verktyg som kan förekomma inom karaktärsämnena.

Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla förmåga att:

1. använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.
2. hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.
3. formulera, analysera och lösa matematiska problem samt värdera valda strategier, metoder och resultat.
4. tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.
5. följa, föra och bedöma matematiska resonemang.
6. kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.
7. relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang.

Kunskapskrav Matematik kurs 3b och 3c

Betyget E – Eleven kan **översiktligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **översiktligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena **i bekanta situationer**. I arbetet hanterar eleven **några enkla** procedurer och löser uppgifter av standardkaraktär **med viss säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av enkel karaktär**. Dessa problem inkluderar **ett fåtal** begrepp och kräver **enkla** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att tillämpa **givna** matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier och metoder.

Eleven kan föra **enkla** matematiska resonemang och värdera med **enkla** omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **med inslag av** matematiska symboler och andra representationer.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **kursens innehåll** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **enkla** resonemang om exemplens relevans.

Betyget D – Betyget D innebär att kunskapskraven för E och till övervägande del för C är uppfyllda.

Betyget C – Eleven kan **utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **några** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med viss säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med viss säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja och** tillämpa matematiska modeller. Eleven kan med **enkla** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**. omdömen egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra enkla matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med viss säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med viss anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade** resonemang om exemplens relevans.

Betyget B – Betyget B innebär att kunskapskraven för C och till övervägande del för A är uppfyllda.

Betyget A – Eleven kan **definiera och utförligt** beskriva innebörden av centrala begrepp med hjälp av **flera** representationer samt **utförligt** beskriva sambanden mellan begreppen. Dessutom växlar eleven **med säkerhet** mellan olika representationer. Eleven kan **med säkerhet** använda begrepp och samband mellan begrepp för att lösa **komplexa** matematiska problem och problemsituationer i karaktärsämnena. I arbetet hanterar eleven **flera** procedurer, **inklusive avancerade och algebraiska uttryck**, och löser uppgifter av standardkaraktär **med säkerhet och på ett effektivt sätt**, både utan och med digitala verktyg.

Eleven kan formulera, analysera och lösa matematiska problem **av komplex karaktär**. Dessa problem inkluderar **flera** begrepp och kräver **avancerade** tolkningar. **I problemlösning upptäcker eleven generella samband som presenteras med symbolisk algebra**. I arbetet gör eleven om realistiska problemsituationer till matematiska formuleringar genom att **välja**, tillämpa **och anpassa** matematiska modeller. Eleven kan med **nyanserade** omdömen utvärdera resultatets rimlighet samt valda modeller, strategier, metoder **och alternativ till dem**.

Eleven kan föra **välgrundade och nyanserade** matematiska resonemang, värdera med **nyanserade** omdömen **och vidareutveckla** egna och andras resonemang samt skilja mellan gissningar och välgrundade påståenden. **Vidare kan eleven genomföra matematiska bevis**. Dessutom uttrycker sig eleven **med säkerhet** i tal och skrift **samt använder** matematiska symboler och andra representationer **med god anpassning till syfte och situation**.

Genom att ge exempel relaterar eleven något i **några av kursens delområden** till dess betydelse inom andra ämnen, yrkesliv, samhällsliv och matematikens kulturhistoria. Dessutom kan eleven föra **välgrundade och nyanserade** resonemang om exemplens relevans.

Centralt innehåll Matematik kurs 3b

Undervisningen i kursen ska behandla följande centrala innehåll:

Algebra

A1	Begreppen polynom och rationella uttryck samt generalisering av aritmetikens lagar till hantering av dessa begrepp.
A2	Algebraiska och grafiska metoder för att lösa polynomekvationer av högre grad.

Samband och förändring

F6	Användning av begreppet geometrisk summa samt linjär optimering i tillämpningar som är relevanta för karaktärsämnena.
F7	Orientering kring kontinuerlig och diskret funktion samt begreppet gränsvärde.
F8	Egenskaper hos polynomfunktioner av högre grad.
F9	Begreppen sekant, tangent, ändringskvot och derivata för en funktion.
F10	Härledning och användning av deriveringsregler för potens- och exponentialfunktioner samt summor av funktioner.
F11	Introduktion av talet e och dess egenskaper.
F12	Algebraiska och grafiska metoder för bestämning av derivatans värde för en funktion.
F13	Algebraiska och grafiska metoder för lösning av extremvärdesproblem inklusive teckenstudium och andraderivatan.
F14	Samband mellan en funktions graf och funktionens första- och andraderivata.
F15	Begreppen primitiv funktion och bestämd integral samt sambandet mellan integral och derivata.
F16	Bestämning av enkla integraler i tillämpningar som är relevanta för karaktärsämnena.

Problemlösning

P1	Strategier för matematisk problemlösning inklusive användning av digitala medier och verktyg.
P3	Matematiska problem av betydelse för samhällsliv och tillämpningar i andra ämnen.
P4	Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.